KRISZTIN NÉMET ISTVÁN

A geometriai transzformációk tárgyalásának egy módja a tanárképzésben

TANÍTÓ- ÉS ÓVÓKÉPZŐ INTÉZET

transzformációk tanítása, egybevágóság, hasonlóság, affinitás, kollineáció

Bevezetés

Írásunkban a nevezetes geometriai transzformációk – egybevágóság, hasonlóság, affinitás, kollineáció – tanárképzésbeli oktatásának egy módjáról foglaljuk össze gondolatainkat.

A geometriai transzformációk hagyományos tárgyalásában az egybevágóságot távolságtartó transzformációként definiáljuk, a hasonlóságot pedig aránytartó transzformációként (pl. [2]). Pelle Béla a tanárképző főiskolák hallgatói számára írt „Geometria" tankönyveiben ([8]), ([9]) a hagyományostól eltérő módon vezeti be ezeket a fogalmakat. A síkratükrözés alapfogalmára és a Tükrözési axiómákra alapozva a tér, ill. a sík egybevágóságát mint síkra, ill. egyenesre vonatkozó tükrözések szorzatát definiálja. A hasonlóságot pedig centrális nyújtás és egybevágóság szorzataként értelmezi. A kétféle definiálási mód közötti különbséget röviden úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a hagyományos definíció egy tulajdonságával határozza meg a fogalmat, az utóbbi pedig „konstruktívan", vagyis módszert ad a leképezés megadására. A konstruktív módszer azonban nem folytatódik [8]-ban a további alapvető leképezéstípusok, az affinitások és a kollineációk vizsgálatánál. ([9]-ben nem szerepelnek ezek a témák.)

A hagyományos tárgyalásmódban az euklideszi síkon az affinitást a sík egyenestartó transzformációjaként definiáljuk, a tengelyes affinitást pedig tengellyel rendelkező affinitásként. A klasszikus projektív síkgeometriában a kollineációt a sík egyenestartó transzformációjaként definiáljuk, a centrális (tengelyes) kollineációt pedig centrummal (tengellyel) rendelkező kollineációként.

Korábbi cikkeinkben már tanulmányoztuk ezt a konstruktív, szorzatokra épülő módszert. Megvizsgáltuk axiomatikus alapjait, továbbá azt, hogy hogyan lehet ezt a módszert az affinitások és a kollineációk témakörére alkalmazni ([4], [5], [6], [7]). Először, a [8]-ban és [9]-ben megkezdett módszert folytatva, a centrális nyújtás fogalmához szorosan kapcsolódva – a lehetséges megadási módokat szem előtt tartva – metrikus alapon definiáltuk a síkbeli tengelyes affinitást és a síkbeli centrális-tengelyes kollineációt. Majd az ily módon bevezetett speciális leképezések szorzataként definiáljuk az új, általánosabb leképezéseket. A hasonlóságra, az affinitásra és a kollineációra vonatkozó alapvető tételeket a Tükrözési axiómákkal, ill. az egybevágóságra vonatkozó tételekkel analóg formában, és analóg módszerekkel tárgyaltuk. Megpróbáltunk egységes, következetes fogalom-, tétel- és módszerrendszert kialakítani. Most röviden ismertetjük a definíciókat, majd a téma tanításával kapcsolatos megjegyzéseinket foglaljuk össze.

Definíciók

A centrális nyújtás fogalma a hagyományos módon szerepel [8]-ban és [9]-ben. (Megjegyezzük, hogy az alábbi definíció kicsit eltér az ott levőtől. A továbbiakban irányított szakaszokat használunk.)

Definíció. *Legyen adott az euklideszi síkon egy C pont és egy* $\lambda(\neq 0)$ *valós szám.* Centrális nyújtás*nak nevezzük a következő leképezést. C legyen fix; más P pont képe legyen az a P' pont, melyre* $CP' = \lambda CP$.

Definíció. *Legyen adott az euklideszi síkon két, egymással nem párhuzamos egyenes, t és e, és egy* $\lambda(\neq 0)$ *valós szám.* Általános tengelyes affinitás*nak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont képe legyen az a P' pont, melyre* $TP' = \lambda TP$, *ahol T a t egyenes azon pontja, melyre (PT) egyállású e-vel.*

Definíció. *Legyen adott az euklideszi síkon két párhuzamos egyenes, t és e, e egyik irányítása, és egy* $\lambda > 0$ *valós szám.* Speciális tengelyes affinitás*nak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P* *pont képe legyen az a P' pont, melyre PP' hossza $\lambda d(t,P)$, és egyirányú, ill. ellentétes irányú e-vel, attól függően, hogy t nem választja el, ill. elválasztja P-t és e-t.*

Definíció. *Legyen adott a kibővített euklideszi síkon egy t egyenes, rajta kívül egy C pont, és egy $\lambda(\neq 0)$ valós szám.* Általános centrális-tengelyes kollineációnak *nevezzük a következő leképezést. C és t pontjai legyenek fixek; más P pont képe legyen az a P' pont (CP)-n, melyre $(P'PCT)=\lambda$, ahol $T:=(CP)\cap t$.*

Definíció. *Legyen adott a kibővített euklideszi síkon egy t egyenes, rajta egy C pont.*
Ha C és t is ideális, akkor a hozzájuk tartozó speciális centrális-tengelyes kollineációkon *a C irányú eltolásokat értjük.*
Ha t közönséges és C ideális, akkor a hozzájuk tartozó speciális centrális-tengelyes kollineációkon *a t tengelyű speciális tengelyes affinitásokat értjük.*
Ha t és C is közönséges, akkor legyen adva még egy t-vel párhuzamos f közönséges egyenes. Ekkor speciális centrális-tengelyes kollineációnak *nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont esetén legyen $F:=(CP)\cap f$. Ha P közönséges, akkor képe legyen az a P' pont (CP)-n, melyre $(CPP')=\frac{FC}{CP}$; ha P ideális, akkor pedig $P':=F$.*

Definíció. *Az euklideszi síkon* hasonlóságnak *nevezzük tengelyes tükrözések és centrális nyúj-tások véges szorzatát.*

Definíció. *Az euklideszi síkon* affinitásnak *nevezzük centrális nyújtások és tengelyes affinitá-sok véges szorzatát.*

Definíció. *A kibővített euklideszi síkon* kollineációnak *nevezzük centrális-tengelyes kollineáci-ók véges szorzatát.*

A téma oktatásával kapcsolatos megjegyzések

A következőkben megpróbáljuk sorra venni, hogy a konstruktív módszer didaktikai és matematikai elveinek milyen következményei vannak, továbbá hogy hol és hogyan kapcsolható össze más módszerekkel.

1. A transzformációk konstruktív definíciói teljes összhangban vannak a függvények megszokott, elemi megadási módjával: a definíciók az értelmezési tartományt és a hozzárendelési szabályt rögzítik. Azonnal meg tudjuk adni, meg tudjuk „mutatni" bármely pont képét. Ezért konkrétabbak, „kézzelfoghatóbbak", de hosszabbak, bonyolultabbak is, mint a hagyományos definíciók. Utóbbiakban bizonyos tulajdonságokkal rendelkező függvényosztályt definiálunk. (Pl.: „a sík olyan egyenestartó transzformációja, aminek van tengelye".) Pont képének megadása csak egyéb, a definícióban nem szereplő tulajdonság levezetése után lehetséges.

2. A konstruktív módszer nem a legáltalánosabb, nem a legkevesebbet kívánó formában vezeti be a fogalmakat. Minden leképezéstípus vizsgálatát egy speciális esettel kezdi; ennek jellemzése után következik a szorzatleképezés. A speciális felől haladni az általános felé fontos didaktikai elv. Ha azonban a sok tulajdonság közül meg akarjuk határozni a legfontosabbakat – amik meghatározzák a leképezést – akkor ez külön vizsgálatot igényel. Ezzel a tárgyalás – a hagyományos felépítéssel összehasonlítva – hosszadalmasabbá, kevésbé „gazdaságossá" válik. A hagyományos felépítés az általános esettel kezd, a leképezés fő invariánsai közvetlenül a definícióban jelennek meg. Ez a mód az általánosítás, az analitikus jellemzés, a más geometriákban való megjelentetés szempontjából előnyösebb. A szorzatalakban való előállítást nem kell külön vizsgálni, a megadással kapcsolatos alaptételek igazolásában megjelenik.

3. Korábbi írásainkban érintettük a transzformációk hagyományos és konstruktív definícióinak egyenértékűségét. Véleményünk szerint az ekvivalencia említése, vizsgálata nemcsak elméletileg, hanem az oktatás szempontjából is fontos. Egybevágóság és hasonlóság esetén azért, mert a hallgatók közoktatásbeli tanulmányaik során más definíciót ismertek meg ezekre a fogalmakra, ill. tanárként más definíciót fognak majd tanítani. Affinitás, kollineáció esetén pedig azért, mert a hallgatók esetleges későbbi tanulmányai során más geometriákban más definíció vonatkozik rájuk. A különböző definíciótípusok zavart okozhatnak, ha nem tárgyaljuk kapcsolatukat.

A középiskolai tankönyvek az egybevágóságot a hagyományos módon, a távolságtartás tulajdonságával vezetik be. A hasonlóság kétféleképpen jelenik meg: vagy az aránytartás tulajdonságával vezetik be, vagy centrális nyújtás és egybevágóság szorzataként definiálják (pl. [1], [3]).

Az egységes rendszer kialakítása érdekében az affinitás és a kollineáció fogalmait is metrikus alapon vezettük be, úgy, hogy szorosan kapcsolódtunk a korábban tanult leképezések definícióihoz. A hallgatóknak ez természetes, hiszen erős bennük a leképezésekkel kapcsolatos metrikus gondolkodás. Ez azonban azt a téves képzetet is okozhatja, hogy ezeket a fogalmakat – sőt, az „egész" geometriát – kizárólag metrikus alapon lehet tárgyalni. Ezen segíthet, ha a megfelelő tételek után szólunk a hagyományos felépítéssel való kapcsolatról, a fő invariánsok kiemelésével. Ez lazítja a metrikus fogalmakhoz való kötődést, előkészíti az általánosítást, a más geometriák felé való nyitást.

A különböző definiálási módokat esetleg rögtön a fogalom bevezetésénél is lehet érinteni. A megfelelő speciális leképezések tárgyalása után az általános leképezés fogalmát egy-egy olyan tételre alapozhatjuk, ami bizonyos tulajdonságok ekvivalenciáját rögzíti:

Tétel. *Az abszolút sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*
- *Előáll véges sok tengelyes tükrözés szorzataként.*
- *Távolságtartó transzformáció.*

Az ilyen leképezést egybevágóság*nak nevezzük.*

Tétel. *Az euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*
- *Előáll egy egybevágóság és egy centrális nyújtás szorzataként.*
- *Előáll véges sok tengelyes tükrözés és centrális nyújtás szorzataként.*
- *Aránytartó transzformáció.*

Az ilyen leképezést hasonlóság*nak nevezzük.*

Tétel. *Az euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*
- *Előáll egy hasonlóság és egy tengelyes affinitás szorzataként.*
- *Előáll véges sok tengelyes affinitás és centrális nyújtás szorzataként.*
- *Egyenestartó transzformáció.*

Az ilyen leképezést affinitás*nak nevezzük.*

Tétel. *A kibővített euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*
- *Előáll egy affinitás és egy centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.*
- *Előáll véges sok centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.*
- *Egyenestartó transzformáció.*

Az ilyen leképezést kollineáció*nak nevezzük.*

4. Felépítésünkben nemcsak az egybevágóság definíciója tér el a közoktatásban szereplőtől, hanem annak axiomatikus alapja is. Az iskolai alap vagy a (térbeli) „mozgás", vagy szakaszok, szögek „egybevágósága" (esetleg mindkettő), ill. ezek alapvető tulajdonságai. A tankönyvek ezek alapján vezetik be az egybevágóság, és a tükrözések fogalmait is. A Tükrözési axiómákra épülő felépítésben pontosan az „ellenkező irányú" felépítéssel találkoznak a hallgatók: itt a síkratükrözés az alap. Tehát pl. a tengelyes tükrözés fogalmának bevezetésénél a megszokott, felezőmerőlegest vagy térmozgást alkalmazó definíció helyett itt egy teljesen új formájú és szemléletű definíciót ismernek meg. Ez a „szemléletváltás" komoly problémát jelent a hallgatóknak, különösen azért, mert rögtön a geometriai tanulmányok elején jelentkezik. Ezt a problémát talán csak később lehet feloldani, pl. amikor a Párhuzamossági axiómával ekvivalens állításokat tárgyaljuk. Ekkor bővebben lehet szót ejteni arról, hogy formailag különböző axiómák létrehozhatják ugyanazt a geometriát is. Természetesen itt azzal a problémával is szembe kell nézni, hogy a hallgatók mennyire vannak tisztában az axiómarendszer „klasszikus" („szemléletes", fizikai tapasztalatokon alapuló) és „modern" (logikai, definíciós) jelentésével.

5. A kollineációk tárgyalásánál is felmerül egy axiomatikus jellegű probléma. Ezt a leképezést az „ideális elemekkel kibővített euklideszi sík"-on vezettük be, amit „projektív sík"-nak is nevezhetnénk, mert illeszkedési, rendezési és folytonossági struktúrája modellezi az ún. „valós (klasszikus) projektív sík" axiómarendszerét. Mi mégsem használtuk ezt a fogalmat, a következők miatt. Vizsgálataink során végig különbséget tettünk az ideális és közönséges elemek között, továbbá a Tükrözési és Párhuzamossági axiómákon alapuló metrikus fogalmakat használtunk. A valós projektív síkon azonban (eredendően) nincsenek sem kitüntetett elemek, sem euklideszi alapú metrika. Ha a hallgató későbbi tanulmányai során találkozik a projektív geometria axiomatikus tárgyalásával, zavart okozhat a projektív sík fogalmának kétféle használata. A problémát részben megoldaná, ha a centrális-tengelyes kollineációt csak az eltűnési egyenestől megfosztott euklideszi síkon definiálnánk. Így megmaradnánk az euklideszi geometria keretei között. Ez azonban még körülményesebbé tenné a tárgyalást, hiszen több ilyen leképezés szorzatánál több egyenest kellene kizárni. A másik megoldás a projektív geometria felől történhetne: először kiépítjük a valós projektív sík geometriáját, majd abban modellezzük az affin és euklideszi síkot. Nyilván ez sem járható út, hiszen bevezető jellegű geometriai tárgyról van szó.

6. A síkbeli és térbeli leképezések közötti kapcsolat is figyelmet érdemel. Külön a síkban és a térben ugyan egységes felépítést valósítottunk meg, de nincs „teljes" egység a sík és a tér között. Egyrészt nem „egyforma" pl. a sík- és térbeli egybevágóság definíciója: az egyikben tengelyes, a másikban síkratükrözés szerepel. Természetesen csak formailag nem egyeznek meg, tartalmilag igen, hiszen a síkbeli tengelyes tükrözést síkratükrözéssel definiáltuk. (Ilyen fogalmi kettősség más felépítésben is előfordul. Pl. a hagyományos felépítésben szakaszok, szögek egybevágósága alapfogalom, más alakzatoké pedig az erre az alapfogalomra visszavezetett távolságtartó leképezésekkel van definiálva.) A másik probléma az, hogy a síkbeli leképezéseket egy síkon belül definiáltuk, a térben két különböző sík között nem létesítenek kapcsolatot. Ezért pl. a két sík közötti párhuzamos, ill. centrális vetítést külön kell tárgyalni. Ezek új „elemi" leképezésként jelenhetnek csak meg. Viszont felhasználásukkal össze lehet kapcsolni a sík- és térgeometriát úgy, hogy beillesztjük ezeket is a szorzatos felépítésbe: síkbeli tengelyes affinitást előállíthatunk térbeli tengely körüli elforgatás és síkok közötti párhuzamos vetítés szorzataként; síkbeli, közönséges centrumú és tengelyű centrális-tengelyes kollineációt pedig előállíthatunk térbeli tengely körüli elforgatás és síkok közötti centrális vetítés szorzataként. Így ezeket az előállításokat is felhasználhatjuk a leképezések vizsgálatában.

7. A leképezések tárgyalásakor fontos kérdés, hogy mi lesz kör (kúpszelet) képe. Kör (kúpszelet) affin, ill. kollineációs képének vizsgálata a hagyományos felépítésben részben vagy egészében analitikus geometriai módon történik. A konstruktív felépítésben is szükségünk van erre az eszközre. Kör tengelyes affinitásnál, ill. centrális-tengelyes kollineációnál kapott képének vizsgálatát csak körülményes módon tudjuk beilleszteni a szorzatos felépítésbe. Az előző pont végén említett, térbeli előállítások alapján kapjuk, hogy kör képe tengelyes affinitásnál, ill. centrális-tengelyes kollineációnál egy körhenger-, ill. körkúpfelület és egy sík metszésvonala. Forgáshenger, ill. -kúp esetén a Dandelin-tételek megadják választ, hogy mi ez a metszet, a ferde esetre azonban nem. Affinitás esetén, nagy kerülővel ugyan, de még választ kaphatunk ezen a módon. Ugyanis minden affinitás előállítható egy hasonlóság és egy merőleges tengelyes affinitás szorzataként; merőleges tengelyes affinitásnál pedig elérhető, hogy forgáshenger síkmetszete legyen a vizsgált kör képe. De kollineáció esetén általában már nem tudjuk biztosítani a forgáskúpot. Ferde körkúp síkmetszetének vizsgálata pedig mindenképpen igényel koordináta-geometriai eszközöket is. A többi kúpszelet képének vizsgálatára pedig csak annyiban alkalmas a fenti módszer, hogy levezethető: minden kúpszelethez van olyan centrális-tengelyes kollineáció, ami őt körbe viszi. (Felhasználva, hogy minden kúpszelet előállítható egyenes körkúp síkmetszeteként.) Ez az eredmény elegendő pl. a Pascal és Brianchon tételek igazolásához, mert – amint az ismert – ezek állításait körre „könnyen" megkaphatjuk.

Visszatérve a kúpszelet affin, ill. kollineációs képének vizsgálatához, ha ezt teljesen részletezni akarjuk, akkor mindenképpen analitikus úton kell tárgyalni. De, véleményünk szerint, több szempontból megéri egy speciális esetben (forgáshengert, -kúpot feltételezve) a fenti, szorzatos módon választ keresni. Egyrészt motivációs céllal; másrészt nagyon szép példája a sík- és térgeometria összekapcsolásának; harmadrészt, sejtés fogalmazható meg az általános esetre. Utána pedig – utalva arra, hogy általános esetben nem alkalmazható ez a módszer – természetes módon merül fel az analitikus út, hiszen a sejtett képek egyenleteit ismerjük.

8. Végül megemlítjük, hogy éppen az előzőekben említett, szintetikusan nehezen tárgyalható részek eredményeinek szemléltetésében nagyban segíthet egy dinamikus geometriai szoftver használata, pl. Cabri, ([10]) Euklides" ([11]). Már pl. az eltolás és az elforgatás tárgyalása kapcsán haszonnal alkalmazható, amikor azt vizsgáljuk, hogy az őket előállító tükrözések tengelyei közül az egyik (bizonyos feltételekkel) tetszőlegesen vehető fel. Egyenes, kör, kúpszelet képének vizsgálatakor is nagy segítséget nyújt a mozgathatóság, mozgó pont nyomvonalának meghatározása, különösen affinitás, kollineáció esetén.

HIVATKOZÁSOK

[1] Czapáry E. – Gyapjas F.: Matematika 9, 10 (3., 2. kiadás), Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003.

[2] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába (8. kiadás) Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
[3] Kosztolányi J. – Kovács J. – Pintér K. – Urbán J. – Vincze I.: Sokszínű matematika 9, 10, Mozaik Kiadó, Szeged, 2001–2002.
[4] Krisztin Német I.: Megjegyzések az egybevágóság és a merőlegesség fogalmának megalapozásához a főiskolai geometriaoktatásban, Berzsenyi Dániel Főiskola Tudományos Közleményei XIII. Természettudományok 8. (2002) 17–37.
[5] Krisztin Német I.: Dedekind's axiom of continuity and the axioms of Reflection, IV. Vedecká konferencia doktorandov, UKF-FPV Nitra, Edícia Prirodovec č. 106, 314–319, Nitra, 2003.
[6] Krisztin Német I.: Remarks on the concept of similarity in teaching geometry in teachers' training college, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae 31 (2004) 107–118.
[7] Krisztin Német I.: Remarks on the concepts of affine transformation and collineation in teaching geometry in teachers' training college, Annales Mathematicae et Informaticae 32 (2005) 225–236.
[8] Pelle B.: Geometria (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
[9] Pelle B.: Geometria (átdolgozott kiadás), EKTF Líceum Kiadó, Eger, 1997.
[10] http://ww w.cabri.com
[11] http://www.euklides.hu

ISTVÁN KRISZTIN NÉMET

A means of discussion of geometrical transformations in teacher training

In [8] and [9] (textbooks for teachers' training colleges written by B. Pelle) isometry and similarity are defined not in the classical way but as a product. We continued this waf of definition refer to the affine transformation and collineation. We summarized the consequences of the mathematical and didactical principles of this method in teacher training, compared the different ways, and studied the connection between them.